Physique générale I

J. – Ph. Ansermet

1er semestre

31/10/01

Contenu

Préface

Polycopié : Physique Générale I et II

littérature

http://dpwww.epfl.ch/cours/ansermet/mecanique_99-00

site du cours

Objectif :

Mettre sous forme mathématique des systèmes / phénomènes physiques.

1. Cinématique

1.1. Définitions de base

Modèle du point matériel :

- Point géométrique représentant un objet (approximation)
- et une masse

Négligence de la forme, de la structure et des mouvements « internes » (changement de structure, rotation).

→ Ce modèle est mauvais !

(exemple : locomotive dans un virage, pendule fil court et sphère grande)

Cinématique : « On se donne des mouvements et on les analyse. »

Dérivées :

$vitesse = \frac{déplacement}{temps}$ et s'il y a une accélération ? → Il faut prendre des intervalles du temps assez petits.

Donc : $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ (dérivée de x par rapport à t)

Si la vitesse change dans le temps : $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \overset{physique!}{=} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \Leftrightarrow x(t+\Delta t) = x + v \cdot \Delta t$$

x, v et a sont des fonctions du temps : $x, v = \dot{x}, a = \dot{v} = \ddot{x}$

1.2. Cinématique du mouvement rectiligne

1.2.1. Mvt. rectiligne uniforme MRU

Le mouvement d'un point matériel sur une ligne droite, à une vitesse constante.

Je me donne un système de coordonnées pour décrire le mouvement. La position du point matériel est donnée par x(t). La vitesse est par définition constante. Que vaut x(t) ?

→ équation différentielle

$$\dot{x} = v$$
$$x = \int v dt$$
$$x = v \cdot t + x_0$$

1.2.2. Mvt. r. uniformément accéléré MRUA

Le mouvement d'un point matériel se déplaçant sur une ligne droite avec une accélération constante.

$$\dot{v} = a$$
$$v = \int a dt$$
$$v = a \cdot t + v_0$$

et

$$\dot{x} = v = a \cdot t + v_0$$
$$x = \int a \cdot t + v_0$$
$$x = \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

→ équation horaire (équation paramétrique de la trajectoire où le paramètre est le temps et la trajectoire est la ligne droite)

L'équation horaire contient beaucoup plus d'information que la trajectoire.

1.3. 2^e^ loi de Newton

Modèle de force **F** = m · **a** Point matériel de masse m.

Quand on aura écrit **F** = m · **a** en terme des coordonnées on aura les équations du mouvement (équations différentielles).

2. Balistique

2.1. Projectile sous pesanteur

1. On introduit un point matériel représentant le projectile et son masse.

2. On introduit le modèle de la force ; ici la pesanteur. La force exercée sur une masse m est verticale, uniforme (partout la même) et proportionnelle à la masse. Le coefficient de proportionnalité est g : $g \approx 9.8 \text{ ms}^{-2}$, **F** = m · **g**. (c'est donc une approximation)

3. 2^e loi de Newton : **F** = m · **a** ➔ m · **g** = m · **a**

4. Cinématique. Représenter **a**, **v** dans un système de coordonnées. Je choisis un système de coordonnées.

   Situation physique : Un point matériel avec vitesse $\mathbf{v}_0$ à la position $\mathbf{r}_0$ au temps $t_0 = 0$.

   → système de coordonnées cartésiennes d'origine O en $\mathbf{r}_0$, Oxz contenant $\mathbf{v}_0$.

5. Projection des forces sur les axes choisis :

   $m \cdot \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$.

6. Les équations du mouvement. (3) avec (4) et (5) :

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= 0 \\ m\,\ddot{y} &= 0 \\ m\,\ddot{z} &= -mg \end{aligned}$$

7. Intégration des équations du mouvement

$$\begin{aligned} &\ddot{x} = 0 \rightarrow \dot{x} = A \rightarrow x = At + B \\ &\ddot{y} = 0 \rightarrow \dot{y} = A' \rightarrow y = A't + B' \\ &\ddot{z} = -g \rightarrow \dot{z} = -gt + C \rightarrow z = -\tfrac{1}{2}gt^2 + Ct + D \end{aligned}$$

8. Les conditions initiales déterminent un mouvement particulier.

   à $t = 0$ point matériel est en O et sa vitesse est $\mathbf{v}_0$.

   $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0} \rightarrow B = 0$; $B' = 0$; $D = 0$.

   $\mathbf{v}(0) = (v_0\cos\alpha\ ;\ 0\ ;\ v_0\sin\alpha) \rightarrow A = v_0\cos\alpha$; $A' = 0$; $C = v_0\sin\alpha$

   On obtient alors comme équations horaires :

   $x = v_0\cos\alpha t$; $y = 0$; $z = -½gt + v_0\sin\alpha t$

2.2. Pesanteur & résistance d'air

1. Modèle de force doit être adapté : Deux forces s'additionnent est « forment » une force résultant : $\mathbf{F}_{res} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$.

   Donc : $\mathbf{F}_r = -b \cdot \mathbf{v}$ et $\mathbf{F}_2 = m \cdot \mathbf{g}$

2. 2e loi de Newton : $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$

3. Cinématique : $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$

4. Les équations du mouvement :

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= -b\,\dot{x} \\ m\,\ddot{y} &= -b\,\dot{y} \\ m\,\ddot{z} &= -mg - b\,\dot{z} \end{aligned}$$

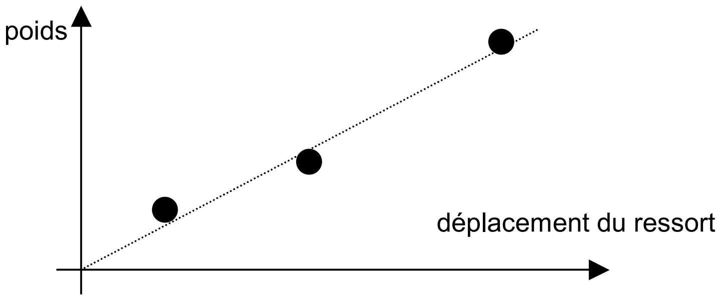
5. → équations différentielles : $\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} \rightarrow \dot{x} = \exp -\frac{b}{m}t$

3. Oscillateurs harmoniques

Modèle de force :

On a

- une force proportionnelle à l'élongation (déplacement)
- une force opposée au déplacement (force du rappel)

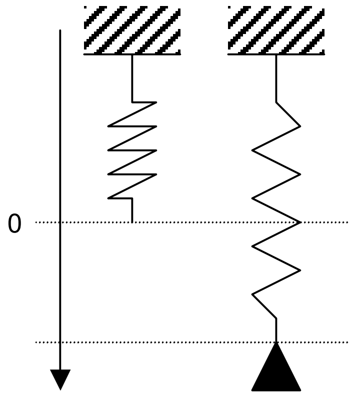


F = -k · **x** ; $k > 0$ constante de ressort.

Attention : les ressorts ont une longueur au repos non nulle. Ici : L'origine à la position au repos de l'extrémité du ressort.

Définition : Un oscillateur harmonique est un point matériel astreint à une force de rappel proportionnelle au déplacement sur une ligne droite.

Description physique/mathématique : Loi de Newton, point matériel – **F** = m · **a**.



Cinématique : Axe de coordonnée X sur cette ligne droite. Origine = position du ressort au repos. Vitesse = $\dot{x}$, accélération = $\ddot{x}$.

Equation du mouvement :

$$m\ddot{x} = -kx$$
$$\ddot{x} = -\tfrac{k}{m}x$$
$$\text{soit } \omega^2 = \tfrac{k}{m}$$
$$\rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$$

ce n'est pas comme avant !

C'est une équation différentielle (dite linéaire à coefficients constants)

Maths : x = A · cos(ωt), x' = -A · ω · sin(ωt), x'' = -A · ω^2 · cos(ωt)

ou bien la solution générale: x = A · cos(ωt) + B · sin(ωt) = C · cos(ωt + ϕ)

Les conditions initiales déterminent un mouvement particulier.

Disons à t = 0 : v = v_0 et x = x_0.

x = A · cos(ωt) + B · sin(ωt) et v = -A · ω · sin(ωt) + B · ω · cos(ωt)

→ $A = x_0$ et $B\omega = v_0$, donc x = x_0 · cos(ωt) + v_0/ω · sin(ωt)

3.1. Oscillateur harmonique amorti

Modèle : force de frottement opposée à la vitesse $\mathbf{F}_g = -b \cdot \mathbf{v}$.

Description mathématique d'un oscillateur harmonique amorti :

… → $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$

Maths : x = exp(λt) → substitution dans l'équation du mouvement donne la valeur de λ.

Si le frottement est faible : $x = C \cdot \exp(-t/t_0) \cdot \cos(\omega t + \phi)$

→ constante de temps de la décroissance : t_0

On définit un facteur de qualité : $Q = \omega \cdot t_0$

4. Cinématique générale

Trajectoire d'un point matériel : lieu géométrique des points.

Equation horaire : où et quand – $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$

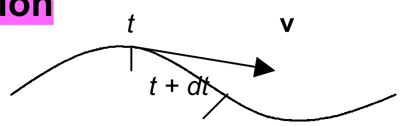
4.1. Référentiel

Les vitesses et les accélérations sont mesurées par rapport à un solide.

Exemple : auditoire, terre, train en mouvement rectiligne uniforme…

4.2. Vitesse et accélération

$$\mathbf{v} = \lim_{dt \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+dt) - \mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

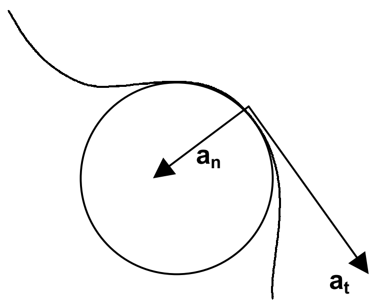


« On voit bien que » **v** est tangent à la trajectoire. Notons $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ le vecteur unité (norme = *1*) le vecteur tangent. $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \tau(t)$

Distance parcourue sur la trajectoire s = s(*t*) à tout t un s et à tout s un t.

Alors : $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(s(t))$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot v = \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot v$$



$$\mathbf{a} = \lim_{dt \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+dt) - \mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}$$

$$\mathbf{v} = v \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} \to \mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{\tau}} + v\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{\tau}} + v\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{\tau}} + v\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{\tau}} + v^2\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds}$$

$\left\|\frac{d\hat{\tau}}{ds}\right\| = \frac{1}{R}$ (rayon du cercle tangeant) $\to \mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{\tau}} + \frac{v^2}{R}\hat{\mathbf{n}}$

Donc on a une accélération tangentielle et une accélération normale ! centripète

4.3. Mouvement circulaire uniforme

Soit un référentiel formé d'un système d'axes Oxy. Posons pour **r** = **r**(*t*).

x = *R*cosωt et y = *R*sinωt ; ω et *R* const.

$\frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R} = 1$, donc la trajectoire est un cercle de rayon *R*.

$$\dot{x} = -R\omega \sin \omega t$$
$$\dot{y} = R\omega \cos \omega t$$

v = *R*ω constante.

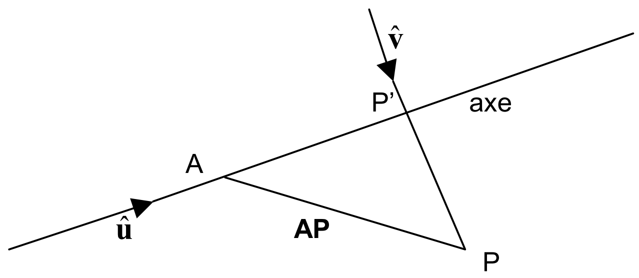
$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0}\,,$$
$$\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \cos \omega t \\ -R\omega^2 \sin \omega t \end{pmatrix} = -\omega^2 \mathbf{r} = -\omega^2 R\hat{\mathbf{e}}_y = \frac{v^2}{R}(-\hat{\mathbf{e}}_y)$$

4.4. Repère

Convention : nous utilisons des repères orthonormaux directs. (Direct : système droite, « loi de tire-bouchon »)

produit vectoriel

Projection d'un vecteur sur un axe :



$AP' = AP\cos\theta = \mathbf{AP}\cdot\hat{\mathbf{u}}$ et $PP' = \mathbf{AP}\cdot\hat{\mathbf{v}}$.

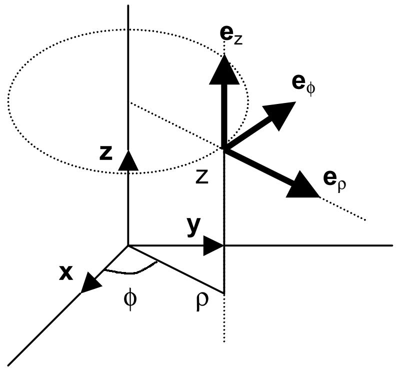
$$\mathbf{AP} = \mathbf{AP'} + \mathbf{PP'} = (\mathbf{AP}\cdot\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} + (\mathbf{AP}\cdot\hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}$$

produit scalaire

4.5. Coordonnées cylindriques et sphériques

4.5.1. Coordonnées cylindriques

r = (**OP**·**x**)·**x** + (**OP**·**y**)·**y** + (**OP**·**z**)·**z**
= ρcosϕ**x** + ρsinϕ**y** + *z***z**



Lignes de coordonnées : traits interrompus.

Repère associé au point P (dépendent du temps !) :

$\mathbf{e}_z$ « vertical », $\mathbf{e}_\rho$ & $\mathbf{e}_\phi$ horizontaux

$\mathbf{e}_\rho \perp \mathbf{e}_\phi$ (rayon ⊥ tangente) → direct

On note que :

$\mathbf{e}_\rho = (\mathbf{e}_\rho\cdot\mathbf{x})\cdot\mathbf{x} + (\mathbf{e}_\rho\cdot\mathbf{y})\cdot\mathbf{y} + (\mathbf{e}_\rho\cdot\mathbf{z})\cdot\mathbf{z} = \cos\phi\,\mathbf{x} + \sin\phi\,\mathbf{y}$

$\mathbf{e}_\phi = (\mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{x})\cdot\mathbf{x} + (\mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{y})\cdot\mathbf{y} + (\mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{z})\cdot\mathbf{z} = -\sin\phi\,\mathbf{x} + \cos\phi\,\mathbf{y}$

$\mathbf{e}_z = (\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{x})\cdot\mathbf{x} + (\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{y})\cdot\mathbf{y} + (\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{z})\cdot\mathbf{z} = \mathbf{z}$

Pour un moment, on utilise les composantes dans le repère **x**, **y**, **z** :

$$\mathbf{e}_\rho = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

On prend Oxyz comme référentiel : $\mathbf{r} = \begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\phi\\ z\end{pmatrix}$ → cinématique

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix}\dot\rho\cos\phi - \rho\dot\phi\sin\phi\\ \dot\rho\sin\phi + \rho\dot\phi\cos\phi\\ z\end{pmatrix} = \dot\rho\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix} + \dot\phi\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix} + \dot z\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

→ $\mathbf{v} = \dot\rho\mathbf{e}_\rho + \dot\phi\mathbf{e}_\phi + \dot z\mathbf{e}_z$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \begin{pmatrix}\ddot\rho\cos\phi - \dot\rho\dot\phi\sin\phi - \dot\rho\dot\phi\sin\phi - \rho\ddot\phi\sin\phi - \rho\dot\phi^2\cos\phi\\ \ddot\rho\sin\phi + \dot\rho\dot\phi\cos\phi + \dot\rho\dot\phi\cos\phi + \rho\ddot\phi\cos\phi - \rho\dot\phi^2\sin\phi\\ \ddot z\end{pmatrix}$$

→ $\mathbf{a} = \left(\ddot\rho - \rho\dot\phi^2\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\rho\ddot\phi + 2\dot\rho\dot\phi\right)\mathbf{e}_\phi + \ddot z\mathbf{e}_z$

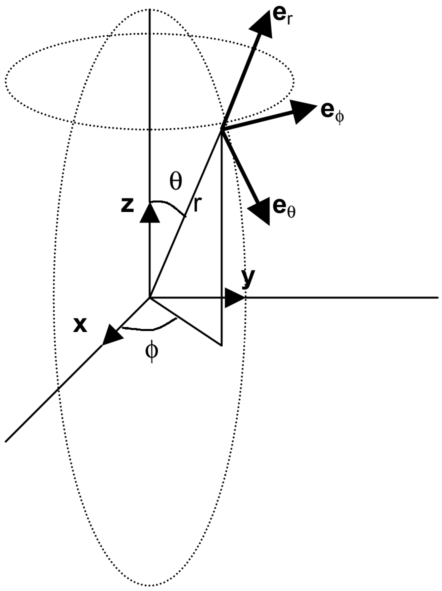
Rappel : on projette sur un repère attaché au point matériel ; le référentiel est Oxyz.

$\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$ et $\mathbf{e}_z$ sont des fonctions du temps subissant une rotation. Formule de Poisson

4.5.2. Coordonnées sphériques

r = cosϕsinθ**x** + sinϕsinθ**y** + cosθ**z**

De nouveau on obtient comme repère attaché un système de coordonnées orthonormal direct :



tangente ⊥ rayon : $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi$

$\mathbf{e}_\phi$ horizontal, $\mathbf{e}_\phi \perp$ plan OPP'

(P' est la projection de P sur le plan Oxy)

Cinématique :

Oxyz comme référentiel.

$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}$$

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{x}(\cos\phi\sin\theta) + \mathbf{y}(\sin\phi\sin\theta) + \mathbf{z}\cos\theta$$

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \mathbf{x}(-\dot{\phi}\sin\phi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\phi\sin\theta) + \mathbf{y}(\dot{\phi}\cos\phi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\phi\cos\theta) - \mathbf{z}\dot{\theta}\sin\theta$$

regrouper pour trouver les vecteurs unités du repères dans cette formule :

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_\phi$$

→ cf. formulaire

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta\right)\mathbf{e}_\theta + \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\right)\mathbf{e}_\phi$$

4.6. Liaisons et contraintes

Problèmes de liaisons :

- Pendule oscillant sur une porte
- Point matériel astreint à se déplacer sur une surface
- Bille sur un anneau

Réduction de systèmes physiques complexes en des modèles simples on introduisant des conditions particulières et en faisant des approximations. → définir des bonnes liaisons

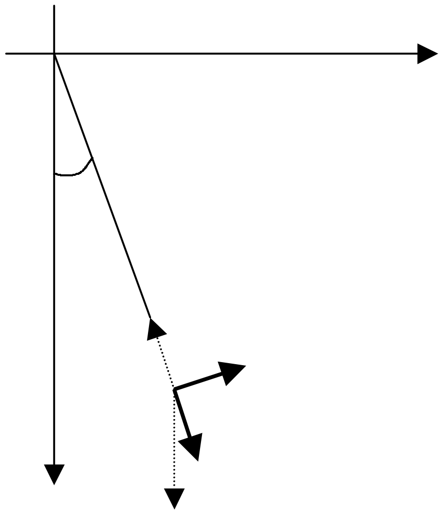
Une liaison, c'est

- un ensemble de contraintes géométriques (pas de mécanismes physiques invoqués)
- force de liaison (**N**)

Exemple : point matériel sur une surface :
Force de liaison **N** : réaction du support toujours normale à la surface.
N = *0* → condition de décollement.

4.6.1. Pendule mathématique

(1) Système : masse



(2) référentiel : Oxyz.

repère associé,

coordonnées cylindrique

(3) Bilan des forces :

P ; **T**

$\mathbf{P} = m \cdot g \cdot \cos\phi \cdot \mathbf{e}_\rho + m \cdot g \cdot \sin\phi \cdot \mathbf{e}_\phi$

$\mathbf{T} = - T \cdot \mathbf{e}_\rho$

(4) Liaisons :

z = constante → $\dot{z} = \ddot{z} = 0$

$\rho = L$ = constante → $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$

(5) Equation $\sum \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$

$\mathbf{v} = \rho \cdot \dot{\phi} \cdot \mathbf{e}_\phi$ et $\mathbf{a} = -\rho \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \mathbf{e}_\rho + \rho \cdot \ddot{\phi} \cdot \mathbf{e}_\phi$

Equations de mouvement :

sur $\mathbf{e}_\rho$: $m \cdot g \cdot \cos\phi - T = m \cdot (- \rho \cdot \dot{\phi}^2)$

sur $\mathbf{e}_\phi$: $- m \cdot g \cdot \sin\phi = m \cdot \rho \cdot \ddot{\phi}$

→ $\dfrac{m \cdot \rho \cdot \ddot{\phi}}{\tan\phi} + T = m \cdot \rho \cdot \dot{\phi}^2$

Remarque : si l'on prend l'équation sur $\mathbf{e}_\phi$ alors on obtient un oscillateur harmonique pour des élongations petites ($\sin\phi \approx \phi$).

4.7. La 3e loi de Newton

Newton : « actio est reactio ».

En termes modernes : $\mathbf{F}^{2\to1} = -\mathbf{F}^{1\to2}$ ($\mathbf{F}^{2\to1}$ force exercée de 2 sur 1) où les deux forces sont opposantes et agissent sur la droite $\mathbf{P_1P_2}$:

$\mathbf{P_1P_2} \wedge \mathbf{F}^{2\to1} + \mathbf{P_1P_2} \wedge \mathbf{F}^{1\to2} = 0$ ou plus général : $\sum_\alpha \mathbf{OP}_\alpha \wedge \mathbf{F}_\alpha^{\text{int}} = 0$

(O étant un point quelconque du référentiel).

4.8. Introduction de grandeurs diverses

On considère un système de point matériel contenant un référentiel et un ou plusieurs points matériels. Soit P_α la position et m_α la masse d'un point matériel, et $\mathbf{OP}_\alpha$ le vecteur d'un point O du référentiel au point P_α.

Quantité de mouvement : $\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha$.

Quantité de mouvement total : $\mathbf{P} = \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha$

Moment cinétique pour un point matériel : $\mathbf{L}_{O\alpha} = \mathbf{OP}_\alpha \wedge \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{OP}_\alpha \wedge m_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha$

La valeur de $\mathbf{L}_{O\alpha}$ dépend du choix de O – il faut le spécifier.

Le moment cinétique du système entière de point matériel :

$$\mathbf{L}_O = \sum_\alpha \mathbf{OP}_\alpha \wedge \mathbf{p}_\alpha$$

Moment de force : Soit une force $\mathbf{F}_\alpha$ exercée au point P_α ; $\mathbf{M}_{O\alpha} = \mathbf{OP}_\alpha \wedge \mathbf{F}_\alpha$.

Théorème du moment cinétique :

Soit **un** point matériel en P subissant une force **F**, un référentiel ∍ O.

$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$.

Alors $\frac{d\mathbf{L}_{O\alpha}}{dt} = \mathbf{v} \wedge (m \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{OP} \wedge m \cdot \mathbf{a} = \mathbf{OP} \wedge m \cdot \mathbf{a} = \mathbf{OP} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{M}_O$.

Théorème de la quantité de mouvement et du moment cinétique pour un système de points matériel :

$\mathbf{F}_\alpha$ est la somme des forces subies par m_α en P_α.

$$m_\alpha \cdot \mathbf{a}_\alpha = \frac{d\mathbf{p}_\alpha}{dt} = \mathbf{F}_\alpha$$

$$\rightarrow \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_\alpha \frac{d\mathbf{p}_\alpha}{dt} = \sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha = \sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{ext} + \sum_\alpha \sum_\beta \mathbf{F}^{\beta \to \alpha} = \sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{ext}$$

cf. 3e loi

$$\mathbf{L}_O = \sum \mathbf{OP}_\alpha \wedge \mathbf{p}_\alpha$$

$$\rightarrow \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \sum_\alpha \mathbf{OP}_\alpha \wedge \mathbf{F}_\alpha = \sum_\alpha \mathbf{OP}_\alpha \wedge \left(\mathbf{F}_\alpha^{ext} + \sum_\alpha \mathbf{F}^{\beta - \alpha}\right) = \sum_\alpha \mathbf{OP}_\alpha \wedge \mathbf{F}_\alpha^{ext} = \mathbf{M}_O^{ext}$$

cf. 3e loi

5. Gravitation

Kepler #1 : Les orbites des planètes autour du soleil sont des ellipses.

Kepler #2 : Le rayon-vecteur balaie des aires égales pendants des intervalles de temps égaux. ($\Delta t \to 0$: $(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})' = 0$; alors $\mathbf{L}_F$ est constant)

Kepler #3 : $(\text{période})^2 : (\text{grand axe})^3$ est constant pour toutes les planètes.

Kepler 1+2+3 donne la loi de la gravitation : $\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$

G : constante universelle

5.1. Pesanteur et gravitation

Champ gravitationnel : $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{e}_\mathbf{r}$. Une masse *m* en **r** subit la force $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r})$.

On considère une sphère homogène :

$\mathbf{g} = \sum_\alpha \frac{-GM_\alpha}{r^2}\mathbf{e}_\mathbf{r} = -\frac{GM}{R^2}$ où *R* est le rayon de la sphère considérée.

6. Rotations

6.1. Théorème d'Euler

Tout mouvement d'un solide indéformable ayant des points fixes peut être représenté par une rotation.

6.2. Rotations infinitésimales

Vecteur unitaire : $\mathbf{e}_i(t) \rightarrow \mathbf{e}_i(t + dt)$

Théorème d'Euler : repère subit une rotation **R**, alors $\mathbf{e}_i(t + dt) = \mathbf{R}\,\mathbf{e}_i(t)$.

$\mathbf{e}_i(t + dt) - \mathbf{e}_i(t) = \mathbf{R}\,\mathbf{e}_i(t) - \mathbf{e}_i(t) = (\mathbf{R} - \mathbf{I})\,\mathbf{e}_i(t)$

→ $\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i$ où **A** est une certaine matrice. Que sait-on de **A** ?

- les longueurs sont conservées : $1 = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i$

$$\frac{d(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i)}{dt} = 0 = 2\mathbf{e}_i\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = 2\mathbf{e}_i\mathbf{A}\mathbf{e}_i = 2\mathbf{A}_{ii} \rightarrow \mathbf{A}_{ii} = 0$$

- tous les angles sont conservés :

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i\frac{d\mathbf{e}_j}{dt} + \mathbf{e}_j\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \mathbf{e}_i\mathbf{A}\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\mathbf{A}\mathbf{e}_i$$

→ $0 = \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{A}_{ji}$

Finalement on obtient :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ -\mathbf{A}_{12} & 0 & \mathbf{A}_{23} \\ -\mathbf{A}_{12} & -\mathbf{A}_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette convention exige de travailler avec des repères orthonormés directs.

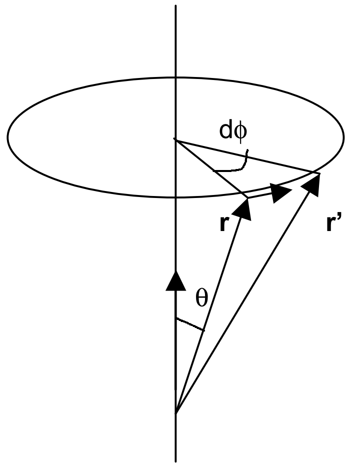
Si **r** est attaché à un repère, et le repère subit une rotation infinitésimale. Soit le repère $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, alors $\mathbf{r} = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3$.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = r_1\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} + r_2\frac{d\mathbf{e}_2}{dt} + r_3\frac{d\mathbf{e}_3}{dt} = r_1\mathbf{A}\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{A}\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{A}\mathbf{e}_3$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = r_1 \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} + \ldots = \begin{bmatrix} -\omega_3 r_2 + \omega_2 r_3 \\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ -\omega_2 r_1 + \omega_1 r_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$$

6.3. Formules de Poisson

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_i$$



Que représente $\boldsymbol{\omega}$?

$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ pour tout **r** parallèle de $\boldsymbol{\omega}$. → les **r** le long de $\boldsymbol{\omega}$ ne varient pas, le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ est porté par l'axe de rotation.

$\mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t) = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\cdot dt$

$||\mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t)|| = ||\boldsymbol{\omega}||\cdot||\mathbf{r}||\cdot dt\cdot\sin\theta$

Géométrie : $d\phi\cdot||\mathbf{r}||\cdot\sin\theta = ||\mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t)||$

Donc : $||\boldsymbol{\omega}|| = \frac{d\phi}{dt}$ (vitesse angulaire)

vecteur instantané de rotation

7. Mécanique du solide indéformable

7.1. Positionnement

3 points du solide non-colinéaires définissent la position de tous les points du solide :

- 1er point : 3 coordonnées
- 2e point : sur une sphère, 2 coordonnées
- 3e point : sur un cercle, 1 coordonnées

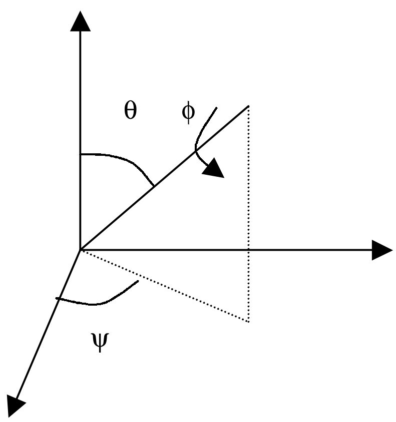
Total : 6 coordonnées (degré de liberté)

Typiquement on prend un point du solide (3 coordonnées) et 3 angle définissant l'orientation du solide → angles d'Euler :

ψ : précession

θ : nutation (inclinaison)

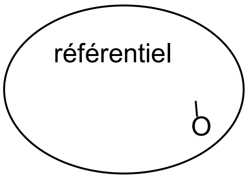
ϕ : rotation propre

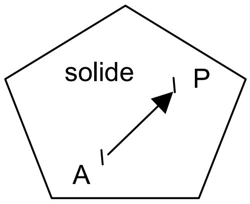


7.2. Vitesse d'un point du solide

Décomposition: **OP** = **OA** + **AP**

$$\frac{d}{dt}\mathbf{OP} = \frac{d}{dt}\mathbf{OA} + \frac{d}{dt}\mathbf{AP}$$





$$\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}(A) + \frac{d}{dt}\mathbf{AP}$$

||**AP**|| ne change pas. L'orientation de **AP** change parce que l'orientation du solide change. On s'est convaincu qu'il existe un $\boldsymbol{\omega}$ décrivant l'évolution de l'orientation du solide.

Soit $\boldsymbol{\omega}$ le vecteur instantané de rotation :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{AP} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AP}$$

Soit $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ le repère attaché au solide :

$$\mathbf{AP} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3 = \sum_i y_i\mathbf{e}_i$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{AP} = \frac{d}{dt}\sum_i y_i\mathbf{e}_i = \sum_i y_i\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \sum_i y_i(\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{e}_i) = \boldsymbol{\omega}\wedge\sum_i y_i\mathbf{e}_i$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\mathbf{AP} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AP} \rightarrow \frac{d}{dt}\mathbf{OP} = \mathbf{v}(A) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AP}$$

7.2.1. Roulement sans glissement

Le point du solide en contact avec le sol (référentiel) a une vitesse nulle.

7.2.2. Centre de masse

Notion pour tout système de points matériels : Soit G le centre de masse.

$$\mathbf{OG} = \frac{\sum m_\alpha \mathbf{OP}_\alpha}{\sum m_\alpha} \rightarrow M\cdot\frac{d\mathbf{V}_G}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{ext}$$

Est-ce que G dépend du choix de O ? – Non !

Quant à $\mathbf{L}_0$: le moment cinétique dépend du choix de O.

Relation entre $\mathbf{L}_0$ et $\mathbf{L}_G$:

$$\mathbf{L}_0 = \Sigma\mathbf{OP}_\alpha \times m_\alpha\mathbf{v}_\alpha = \Sigma(\mathbf{OG} + \mathbf{GP}_\alpha) \times m_\alpha\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{OG} \times \Sigma m_\alpha\mathbf{v}_\alpha + \Sigma\mathbf{GP}_\alpha \times m_\alpha\mathbf{v}_\alpha$$

$$\rightarrow \mathbf{L}_0 = \mathbf{OG} \times M\cdot\mathbf{v}_G + \mathbf{L}_G$$

Théorème du moment cinétique pour $\mathbf{L}_G$: $\frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = \mathbf{M}_G^{ext}$

Démo : voir 11-3/4

7.3. Inertie

$\mathbf{L}_G = \Sigma \mathbf{GP}_\alpha \times m_\alpha \cdot (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{GP}_\alpha) = \Sigma \mathbf{GP}_\alpha \times m_\alpha \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{GP}_\alpha)$

Soit un axe de rotation fixe. **u** est vecteur unité de l'axe. Je m'intéresse à la projection de $\mathbf{L}_G$ sur l'axe. Soit $\boldsymbol{\omega} = \omega \cdot \mathbf{u}$.

$\mathbf{L}_G \cdot \mathbf{u} = [\Sigma \mathbf{GP}_\alpha \times m_\alpha \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{GP}_\alpha)] \cdot \mathbf{u} = [\Sigma \mathbf{GP}_\alpha^2 m_\alpha \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{GP}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot m_\alpha \cdot \mathbf{GP}_\alpha] \cdot \mathbf{u}$

→ $\mathbf{L}_G \cdot \mathbf{u} = \omega \cdot \Sigma m_\alpha \cdot [\mathbf{GP}_\alpha^2 - (\mathbf{GP}_\alpha \cdot \mathbf{u})^2] = (\Sigma m_\alpha \cdot d^2_\alpha) \cdot \omega$ où d_α est la distance du point P_α est l'axe de rotation.

L'inertie par rapport à un axe est donc définie comme : $I_\Delta = \Sigma m_\alpha \cdot d^2_\alpha$.

[kgm^2]

7.3.1. Tenseur d'inertie

Soit la matrice *3x3* $\mathbf{I}_G$ tenseur d'inertie : $\mathbf{L}_G = \mathbf{I}_G \cdot \boldsymbol{\omega}$ (produit matriciel)

On peut trouver un repère $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ pour lequel on a

$$\begin{bmatrix} L_{G1} \\ L_{G2} \\ L_{G3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{L}_G = \mathbf{I}_{11}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{I}_{22}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{I}_{33}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_3$$

Ce repère est appelé repère d'inertie ; les axes portés par $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ sont les axes principaux d'inertie.

7.3.2. Théorème de Steiner

Soit un solide avec axe fixe Δ, **u** || Δ. En toute généralité $\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} = \mathbf{M}_0^{ext}$, $O \in \Delta$. Projection sur Δ :

$\mathbf{u}\,\mathbf{L}_0 = \mathbf{u}\,(\mathbf{OG} \times M\mathbf{v}_G + \mathbf{L}_G) = \mathbf{u}\,(M\mathbf{OG} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OG})) + \mathbf{u}\,\mathbf{L}_G = (Md_G^2 + I_{G\Delta}) \cdot \omega$

8. Mouvement relatif

Procédé standard : vitesse par rapport au référentiel, projection dans le repère. Référentiel d'inertie : état de libre force → MRU (Loi 1 de Newton). On sait que **F** = m**a** ; … si le référentiel est un référentiel d'inertie.

Et si on prenait comme référentiel la Terre ? un wagon accéléré ? un carrousel ?

→ On introduit un référentiel relatif bougeant par rapport au référentiel d'inertie (absolu).

Soit un point matériel en P : $\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + \mathbf{AP} = \mathbf{OP} + \Sigma y_i \mathbf{e}_i$

vitesse absolue de P = $\mathbf{v}_a(P) = \frac{d\mathbf{OA}}{dt} + \sum \dot{y}_i \mathbf{e}_i + \sum y_i \dot{\mathbf{e}}_i$

$= \mathbf{v}_a(P) + \mathbf{v}_{rel}(P) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AP}$

(formules de Poisson)

$\mathbf{a}_a(P) = \mathbf{a}_a(A) + \mathbf{a}_{rel}(P) + [\ 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{rel}(P)\ ] + [\ \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AP})\ ] + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{AP}$

Force Coriolis / centripète.

Exemples sur feuilles ext.

9. Conservation

On se rappelle les équations $\frac{d\mathbf{P}_{tot}}{dt} = \sum \mathbf{F}^{ext}$ et $\frac{d\mathbf{L}_{Otot}}{dt} = \sum \mathbf{M}_O^{ext}$.

Principe de conservation pour un système isolé (pas de force extérieure):

$\mathbf{P}_{tot}$ = constante ; $\mathbf{L}_{O\,tot}$ = constante

De même façon on a :

$$\begin{matrix} \mathbf{M}_O^{ext}\hat{\mathbf{u}} & & \mathbf{L}_{Otot}\hat{\mathbf{u}} = cste. \\ ou & \Rightarrow & ou \\ \mathbf{F}^{ext}\hat{\mathbf{u}} & & \mathbf{P}_{tot}\hat{\mathbf{u}} = cste. \end{matrix}$$

Exemples → feuille ext.

9.1. Collisions

2 objets se rapprochent et subissent une interaction mutuelle : on peut définir un « avant » et un « après ». Ainsi on a **P**(avant) = **P**(après).

9.1.1. Conservation de l'énergie cinétique

Soit le cas que la grandeur de l'énergie cinétique est conservée. On dit que le choc est élastique. (inélastique : les masses collent ensemble)

Ainsi on obtient une deuxième équation pour les inconnues « après » (vitesses).

Et si on n'a pas de conservation d'énergie cinétique ?

Il se peut qu'on connaisse Q tel que $K_i + Q = K_f$ (Q = « énergie cinétique produite »).

On peut s'imaginer des cas intermédiaires entre totalement inélastique et élastique : on définit (empirique) un coefficient de restitution *e*.

$|\mathbf{v}_{1f} - \mathbf{v}_{2f}| = e * |\mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i}|$; $e \leq 1$

10. Energie, Puissance, Travail

10.1. Description à une dimension

Point matériel *m*, force **F**(*x*) sur l'axe des *x* qui dépend que de la position *x*. On pose l'équation différentielle $m\ddot{x} = F(x)$. Solution : c'est l'équation horaire *x* = x(*t*) :

v = v(x(*t*)), alors $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$ → $mv\frac{dv}{dx} = F(x(t))$.

$$\frac{d}{dx}(\tfrac{1}{2}mv^2) = F(x) \rightarrow \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}(\tfrac{1}{2}mv^2)dx = \int_{x_1}^{x_2}F(x)dx\,.$$

$$\tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2}F(x)dx$$

Energie cinétique : $K = \frac{1}{2}mv^2$

Travail de la force pour aller de x_1 à x_2 : $\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$.

On choisit un point de référence x_s. Le potentiel au point x est défini comme le travail pour aller de x à x_s :

V(x) = $\int_{x}^{x_s} F(x)dx$.

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \int_{x_1}^{x_s} F(x)dx + \int_{x_s}^{x_2} F(x)dx = V(x_1) - V(x_2)$$

→ $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = V(x_1) - V(x_2)$; $\frac{1}{2}mv_2^2 + V(x_2) = \frac{1}{2}mv_1^2 + V(x_1)$.

Théorème de l'énergie cinétique : $K_2 - K_1 = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$

Le changement d'énergie cinétique en allant de (1) à (2) est égal au travail des forces, allant de (1) à (2).

E = énergie mécanique (totale) = K + V est une constante du mouvement.

V(x) = $\int_{x}^{x_s} F(x)dx = -\int_{x_2}^{x} F(x)dx$ → $\frac{dV}{dx} = -F(x)$

Quand une force F « dérive d'un potentiel », alors $F(x) = -\frac{d}{dx}V$.

10.2. Trois dimensions

Soit **r** = **r**(t) équation horaire d'un point matériel de masse m, subissant une force **F** :

$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \Leftrightarrow \mathbf{F}\mathbf{v} = m\mathbf{v}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)$, par intégration vers dt :

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\mathbf{v}dt = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\mathbf{v}dt = \int_{(1)\ trajectoire}^{(2)} \mathbf{F}d\mathbf{r}$ = travail de **F** pour aller de (1) à (2).

Théorème de l'énergie cinétique : $K_2 - K_1 = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F}d\mathbf{r}$

K = $\frac{1}{2}mv^2$ = énergie cinétique.

Travail = force x longueur, puissance = énergie / temps. On a vu que $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = \mathbf{Fv}$ → **F** · **v** = puissance développée par **F**

C'est la composante de la force le long de la trajectoire qui travaille.

Supposons que V(**r**) = $\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_s} \mathbf{F} d\mathbf{r}$ est bien définie.

Alors $K_2 - K_1$ = $\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F} d\mathbf{r}$ = $\int_{(1)}^{\mathbf{r}_s} \mathbf{F} d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_s}^{(2)} \mathbf{F} d\mathbf{r}$ = V(1) – V(2).

E = K + V est une constante du mouvement, c'est l'énergie mécanique totale.

Math : **F** dérive d'un potentiel si $\oint \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0$: $\oint \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \mathbf{F} = 0$

Si V existe, **F** s'écrit en coordonnées cartésiennes : $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial x} \\ -\frac{\partial V}{\partial y} \\ -\frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$

Si $\mathbf{F}^c = -\nabla V$ (i.e. $\mathbf{F}^c$ dérive d'un potentiel) et si $\mathbf{F}^{nc}$ = résultante des forces qui ne dérivent pas d'un potentiel, alors $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2 + V) = \mathbf{F}^{\mathbf{nc}} \cdot \mathbf{v}$.

11. Equations de Lagrange

On suppose un système de N points matériels. On choisit des coordonnées généralisées pour définir les positions des points matériels compte tenu des contraintes.

n est le nombre de degrés de liberté (nombre de coordonnées indépendantes qui définissent les positions des N points matériels étant donné les contraintes).

11.1. Principe de d'Alembert

Soit $\delta\mathbf{r}$ un déplacement virtuel compatible avec les contraintes :

$\delta\mathbf{r} = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}\delta q_j$ avec les δq_j compatible avec les contraintes.

On reprend Newton : **F** = m**a**. De plus on décompose les forces en forces de contraintes et autres : $\mathbf{F} = \mathbf{F}^a + \mathbf{F}^{cont}$. Soit Newton projeté sur $\delta\mathbf{r}$:

$(\mathbf{F}^a + \mathbf{F}^{cont})\ \delta\mathbf{r} = m\mathbf{a}\ \delta\mathbf{r}$. Par définition, pour un déplacement virtuel compatible avec les contraintes, les forces de contrainte ne travaillent pas,
$\mathbf{F}^{cont} \cdot \delta\mathbf{r} = 0$.

Or on arrive à $(\mathbf{F}^a - m\mathbf{a})\ \delta\mathbf{r} = 0$. Si on exprime $\delta\mathbf{r}$ en terme des n coordonnées générales, et en plus on définit T l'énergie cinétique du système en question, alors on trouve l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i=\sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$$

Q_t représente une force généralisée agissant pour une coordonnée généralisée q_i:

- si q_i est une longueur : Q_i est une force
- si q_i est un angle : Q_i est un moment de force

11.2. Forces conservatives

Si la force $\mathbf{F}^a$ dérive d'un potentiel, on a $\mathbf{F}^a = -\nabla V$. Q_i peut alors s'écrire :

$$Q_i = \mathbf{F}^a \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = -\nabla V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

et l'équation trouvée au début de la page devient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial V}{\partial q_i}\ ;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial (T-V)}{\partial q_i}=0$$

Puisque le potentiel ne dépend que de la position, on peut même écrire $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial (T-V)}{\partial q_i}=0$.

Le lagrangien : $L = T - V$ et $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$